

# Linéarisation des débits optimaux dans les problèmes de codage de source et de canal en régime zéro erreur

Nicolas Charpenay\*, Maël Le Treust† and Aline Roumy‡

## Résumé

En régime d'erreur asymptotiquement nulle, le débit optimal d'un problème composé de problèmes indépendants se linéarise. Cette propriété a plusieurs implications importantes. D'un point de vue théorique, ceci permet d'obtenir une expression du débit optimal en fonction d'une seule variable aléatoire (en anglais single letter characterization) et non comme une limite d'une fonction d'une suite infinie de variables aléatoires (en anglais multi letter expression). L'autre implication importante est d'ordre pratique car cette propriété signifie que l'encodage séparé de problèmes indépendants est optimal. Cette propriété n'est en revanche pas vérifiée en régime d'erreur exactement nulle, régime également appelé zéro erreur. Dans ce papier, nous proposons une condition qui est équivalente à la linéarisation du débit optimal en régime zéro erreur. Ceci permet en particulier de déterminer de nouveaux cas, où nous pouvons calculer le débit optimal.

## Mots clefs

Codage zéro erreur, linéarisation du débit optimal.

## Article publié base de cette soumission

Cette soumission est basée sur l'article :

N. Charpenay, M. Le Treust, A. Roumy, "Complementary Graph Entropy, AND Product, and Disjoint Union of Graphs", IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), 2023.

## 1 Résumé étendu

Les problèmes de codage dits zéro erreur englobent une variété de problèmes de codage source et canal où la probabilité d'erreur doit être exactement nulle. Pour fixer les idées, c'est le cas par exemple du codage entropique de Huffman. La contrainte d'erreur nulle diffère de la contrainte d'erreur asymptotiquement nulle, cette dernière nécessitant que la probabilité d'erreur tende vers zéro lorsque la longueur de code bloc tend vers l'infini. Lorsque la contrainte est zéro erreur et que l'encodeur et le décodeur ont accès à des informations différentes, la nature du problème change. Le problème n'est plus statistique mais combinatoire. C'est

cas par exemple du problème de codage de source avec information adjacente disponible au décodeur uniquement et du problème de codage de canal que nous étudions ici. Du fait de leur nature combinatoire, ces problèmes sont équivalents à des problèmes de coloriage de graphes. Aussi, ces problèmes sont difficiles et il existe très peu d'exemples pour lesquels nous savons déterminer les débits optimaux. Ici, nous étudions des familles de problèmes indépendants pour lesquels la distribution se décompose en un produit de distributions. Dans le cas zéro erreur, l'indépendance des problèmes n'impliquent pas nécessairement la linéarisation des débits optimaux. En particulier, dans le contexte du codage de canal, [1] montre un contre-exemple basé sur le graphe de Schläfli, où l'encodage conjoint de problèmes indépendants entraîne une capacité zéro erreur  $C_0$  plus élevée que l'encodage séparé. Déterminer quand l'encodage séparé est optimal, ou de manière équivalente quand la linéarisation est optimale, reste un problème ouvert en régime zéro erreur. Récemment, [2] et [3, Théorème 4.1] montrent que pour tous les graphes  $G$  et  $G'$

$$C_0(G) + C_0(G') = C_0(G \wedge G') \quad (1)$$
$$\iff \log \left( 2^{C_0(G)} + 2^{C_0(G')} \right) = C_0(G \sqcup G'),$$

où  $\wedge$  désigne le produit AND, et  $\sqcup$  désigne l'union disjointe de graphes. Dans [4], nous montrons que l'équivalence (1) est également valable pour l'entropie complémentaire du graphe  $\bar{H}$ , qui, selon [5] et [6], détermine le taux optimal dans le problème de codage de source zéro erreur avec information adjacente au décodeur.

Si ces deux résultats semblent similaires, ils diffèrent en ce que pour  $C_0$  la propriété de linéarisation ne dépend que des graphes caractéristiques, alors que pour  $\bar{H}$  elle peut également dépendre de la distribution de probabilité sur les sommets des graphes.

Dans ce travail, nous établissons l'équivalence entre la linéarisation de  $C_0$  et  $\bar{H}$  lorsque la distribution de probabilité  $P_{V'}$  maximise une troisième quantité : la capacité à erreur nulle relative à une distribution  $C(G \wedge G', P_{V'})$ . Cette notion cruciale, introduite dans [7], est liée à  $C_0$  via le résultat de [8, Théorème 2], voir aussi [9, Théorème 13.68], et est liée à  $\bar{H}$  via le résultat de [10, Lemme 1]. Nous montrons que pour une telle distribution sur le produit des sommets, les propriétés de linéarisation de  $C_0$ ,  $\bar{H}$  et  $C(G, P)$  par rapport au produit AND, et à l'union disjointe de graphes, sont toutes équivalentes.

\*Univ. Rennes, CNRS, IRMAR UMR 6625, 35000 Rennes, France

†Univ. Rennes, CNRS, Inria, IRISA UMR 6074, 35000 Rennes, France

‡INRIA Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

## Références

- [1] Willem Haemers. On some problems of Lovász concerning the Shannon capacity of a graph. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(2) :231–232, 1979.
- [2] Alexander Schrijver. On the Shannon capacity of sums and products of graphs. *Indagationes Mathematicae*, 34(1) :37–41, 2023.
- [3] Avi Wigderson et Jeroen Zuiddam. *Asymptotic spectra : Theory, applications and extensions*. manuscript, 2023.
- [4] Nicolas Charpenay, Maël Le Treust, et Aline Roumy. Complementary graph entropy, and product, and disjoint union of graphs. Dans *2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pages 2446–2451, 2023.
- [5] Noga Alon et Alon Orlitsky. Source coding and graph entropies. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(5) :1329–1339, 1996.
- [6] Prashant Koulgi, Ertem Tuncel, Shankar L Regunathan, et Kenneth Rose. On zero-error source coding with decoder side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(1) :99–111, 2003.
- [7] Imre Csiszár et János Körner. On the capacity of the arbitrarily varying channel for maximum probability of error. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(1) :87–101, 1981.
- [8] Luisa Gargano, János Körner, et Ugo Vaccaro. Capacities : from information theory to extremal set theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 68(2) :296–316, 1994.
- [9] Gábor Simonyi. Perfect graphs and graph entropy. An updated survey. Dans Bruce A Reed et Jorge L Ramírez Alfonsín, éditeurs, *Perfect Graphs*, chapitre 13, pages 293–328. John Wiley & Sons, 2001.
- [10] Katalin Marton. On the Shannon capacity of probabilistic graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 57(2) :183–195, 1993.